

Colle 10 première semaine
Du 1/03 au 5/03

1 Révisions sur : continuité et dérivabilité

- Définition de la continuité en un point. Continuité à gauche, à droite, sur un intervalle.
- Prolongement par continuité en un point.
- Caractérisation séquentielle de la continuité (démontré). Application à la résolution de l'équation $f(x + y) = f(x) + f(y)$ avec $f \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
- Opérations sur la continuité. Composition.
- Théorème des valeurs intermédiaires (démontré mais cf remarque). Algorithme de dichotomie pour la recherche d'un zéro d'une fonction continue.
- L'image d'un segment par une application continue est un segment (admis). Cas des applications strictement monotones.
- Théorème de la bijection : pour une fonction continue, être strictement monotone équivaut à être injective et donc bijective sur son image (démontré). Alors la fonction réciproque est continue et strictement monotone (admis).
- Définition des fonctions lipschitziennes. Les fonctions lipschitziennes sont continues.
- Continuité des fonctions à valeurs dans \mathbb{C} .
- Définition de la dérivabilité en un point. Elle implique la continuité. Tangente. Dérivabilité à gauche et à droite et sur un intervalle.
- Opérations somme, produit, multiplication par un scalaire, quotient et composition de fonctions dérivables.
- Dérivabilité d'une fonction réciproque, expression de la dérivée (démontré).
- Extremum local et dérivée (démontré).
- Théorème de Rolle (démontré).
- Égalité et inégalité des accroissements finis (démontré). Traduction en terme de fonctions lipschitziennes.
- Constance, monotonie et dérivabilité (démontré).
- Continuité d'une dérivée : f continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$. Si f' admet une limite finie en a alors f est dérivable en a et f' est continue en a (démontré).
- Utilisation des accroissements finis pour obtenir une vitesse de convergence exponentielle d'une suite définie par récurrence, $u_{n+1} = f(u_n)$.
- Définition des dérivées successives, des espaces \mathcal{D}^k , \mathcal{C}^k et \mathcal{C}^∞ .
- Opérations sur les dérivées successives. Somme, produit (Leibniz), quotient, composée, fonction réciproque.
- Extension de la dérivabilité pour des fonctions à valeurs complexes. Inégalité des accroissements finis dans ce cadre.

La démonstration des valeurs intermédiaires a été vue mais n'est pas au programme des PCSI. L'algorithme de dichotomie par contre oui. Je rappelle que l'énoncé du théorème de Bolzano-Weierstrass a été vu mais n'est pas au programme (cf image d'un segment par une application continue). De même la continuité d'une réciproque n'a pas été démontrée. Enfin la continuité uniforme n'est pas au programme.

2 Arithmétique dans \mathbb{Z}

- Relation de divisibilité, propriétés.
- Relation de congruence, propriétés.

- Division euclidienne, théorème et algorithme. Relation avec la congruence.
- PGCD. Définition, propriétés. Théorème de Bezout (**Hors programme**) et algorithme d'Euclide en polycopié.
- Nombres premiers entre eux. Théorème de Gauss et son corollaire (si $a|c$ et $b|c$ et $\text{pgcd}(a,b)=1$ alors $ab|c$). Forme irréductible d'un rationnel.
- PPCM. Définition, propriétés. $|ab| = \text{PGCD}(a,b) \times \text{PPCM}(a,b)$.
- Nombres premiers. Définition. Existence et unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers (**Admis**). Liens avec le pgcd et le ppcm. Infinité des nombres premiers.